



**REVISTA  
DE LOS  
CATEDRÁTICOS  
DE  
INSTITUTO**

**JUNIO 2016  
NÚM 39**

**C  
A  
T  
E  
D  
R  
A  
N  
O  
V  
A**

**IES MURILLO,  
uno de los  
más antiguos  
de Sevilla,  
creado en 1933**





# CATEDRA NOVA

## **CATEDRA NOVA REVISTA DE LOS CATEDRÁTICOS DE INSTITUTO**

Edita: **ANCABA**,  
Asociación Nacional de  
Catedráticos de Instituto

Presidente:  
**Felipe José de Vicente**

Vicepresidente y  
Secretario General:  
**Rafael Coloma**

Tesorero:  
**Miguel González**

Vocales:  
**Ramón Bohigas  
Josep Otón**

*Correspondencia:*  
*Secretaría general*  
*Apartado de Correos, 544*  
*03080 Alicante*  
*Tel: 607040291*

[ancaba@ancaba.net](mailto:ancaba@ancaba.net)  
[www.ancaba.net](http://www.ancaba.net)  
ISSN: 1135-2981

Maquetación: Mercè Espiell

© de la edición y maquetación: ANCABA

© de los artículos: sus autores

**ANCABA no comparte necesariamente las  
opiniones de los artículos que son  
responsabilidad de sus autores**



# CATEDRANA NOVA

## ÍNDICE

### **SOBRE ÁREAS E INTEGRALES**

**Antonio González-Corbalán ..... 4**

### **EN EL CENTENARIO DE MIGUEL DE CERVANTES. CERVANTES Y LAS MUJERES**

**Juan Gutiérrez Rodríguez ..... 25**

### **“EL NIÑO VA A LA ESCUELA A APRENDER, NO A SER FELIZ”**

**Alberto Royo ..... 30**

### **“LA PEDAGOGÍA HA DEJADO LA ENSEÑANZA EN LOS HUESOS”**

**Ricardo Moreno Castillo ..... 35**

### **LIBROS..... 39**

Miguel Ángel Sancho Gargallo, *La Autonomía de la Escuela Pública* ..... 39

Felipe-José de Vicente Algueró, *De la Pepa a Podemos. Historia de las Ideas Políticas de la España Contemporánea.* ..... 40

### **NOTICIAS DE ANCABA..... 41**

ANCABA EN LA PERMANENTE DEL CONSEJO ESCOLAR DEL ESTADO.....41

LA ASOCIACIÓN DE CATEDRÁTICOS DE CATALUNYA CELEBRA SU 25 ANIVERSARIO....42

### **PUBLICACIONES EN CATEDRA NOVA ..... 44**

**ANCABA ASOCIACIÓN ..... 45**

## **SOBRE ÁREAS E INTEGRALES**

**Antonio González-Corbalán**

Catedrático de Matemáticas  
Doctor en Matemáticas por la Universidad de Cantabria  
Máster en Ciencias de la Computación

Partiendo de las áreas y volúmenes asociadas a las formas geométricas más simples, las que se estudian habitualmente en Primaria y Secundaria Obligatoria, intentaremos extender nuestro conocimientos a otras formas geométricas más complejas. Trataremos la *integración* como el último “gran” paso del camino recorrido, desde épocas anteriores a la Grecia Clásica hasta la actualidad, en el problema del cálculo de magnitudes geométricas (y físicas). Uno de los objetivos de este artículo es hacer patente que dicho paso, la *integración*, se relaciona armónicamente con todos los datos anteriormente y evitar su presentación como un hecho aislado. Pero el objetivo principal de este trabajo es mostrar que puede usarse *la secuencia de ideas fundamentales* como hilo conductor de nuestra exposición didáctica. Entendemos aquí como *ideas fundamentales* aquellas que jalonan el camino, o dicho de una forma más pragmática, las que implican un avance científico sustancial. Nuestra tesis es que haciéndolo de esa forma obtendremos, casi con seguridad, grandes beneficios pedagógicos. Los aspectos técnicos, como por ejemplo el método de las integrales racionales, deben ser tratados con la profundidad que requieran las circunstancias del curso/grupo que actualmente se nos presente. Y siempre como “consecuencias” de las *ideas fundamentales* ya expuestas.

El planteamiento anterior nos lleva a cuestionarnos la secuenciación y el enfoque habituales de los contenidos de 2º de Bachillerato que se agrupan en los temas denominados “integrales” indefinidas/cálculo de primitivas” y “aplicaciones del cálculo integral/áreas y volúmenes”. A continuación voy a exponer una propuesta de varias unidades didácticas, o lecciones, esquematizando su contenido lo suficiente como para dar forma a un esqueleto completo de los temas que nos ocupan.

## Unidad 1

### Antes de la matemática griega y el método de congruencia.

En el cálculo por *corta y pega* de las áreas de las figuras más simples (cuadrado, rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio y polígonos) se está usando la *idea fundamental* de congruencia de figuras por movimientos, -traslaciones, rotaciones y reflexiones- en el plano. Una vez establecida como unidad de área fundamental un cuadrado de lado unidad se pueden medir otras áreas de polígonos mediante congruencias (cortar/pegar y mover). Debemos aclarar que las ideas de cortar y pegar figuras en el plano son coherentes debido a que los movimientos conservan todas las distancias de las figuras a las que se aplican (rectángulos, triángulos, paralelogramos, etc.). Hay que explicar a los alumnos que esto ocurre debido a que en el plano se miden las distancias con la distancia euclídea, es decir con el teorema de Pitágoras, y a que dichos movimientos conservan la distancia. En este punto conviene hacer dos observaciones importantes. La primera es que el plano del que hablamos no es más que un modelo matemático útil. Los planos, y las figuras geométricas en ellos, *no existen* en el espacio físico que nos rodea. De éste sólo podemos hacernos modelos, mejores o peores, que nos permiten manipular nuestros artefactos y conceptualizaciones. Y la segunda, y más importante, que en nuestro modelo de plano se pueden definir distancias de muy diferente naturaleza siendo la euclídea la más simple de todas ellas. Por todo lo expuesto las ideas de cortar, pegar, mover, ser congruente, etc. no pueden considerarse ideas triviales. Asimismo los volúmenes de prismas y pirámides pueden encontrarse mediante las ideas de cortar/pegar/hacer congruente en el espacio. Se pueden poner como ejemplo las pirámides y los troncos de pirámides. Así es como los agrimensores y constructores establecieron fórmulas para áreas de figuras planas y volúmenes de prismas y pirámides en las civilizaciones, que nosotros sepamos, mesopotámicas y egipcia. Hay que puntualizar que todas estas ideas se usaba sin formalización, ni demostración formal alguna, tal y como la

entendemos hoy en día. Entre los geómetras de esas civilizaciones primaba lo práctico y lo empírico. A veces también optaban por dar fórmulas aproximadas, suficientes en sus aplicaciones prácticas. Por ejemplo, en Mesopotamia, para calcular el área de un cuadrilátero hacían el producto de las medias aritméticas de los pares de lados opuestos. Para calcular el área de un círculo tomaban 3 por el cuadrado de su radio. Y el volumen del tronco de pirámide lo hallaban tomando el producto de la altura por la media aritmética de las áreas de las bases.

Demócrito, Eudoxo, Arquímedes y el método de exhaustión (/mecánico).

El siguiente hito fue el intento de obtener rigurosamente las áreas de la circunferencia, y sus partes, y los volúmenes de los cuerpos redondos, y sus partes. O al menos establecer una relación clara entre dichas magnitudes y los parámetros de la figura en cuestión. Parece que la primera referencia a que el volumen de la pirámide y del cono es  $1/3$  de los correspondientes prisma y cilindro se debe a Demócrito, aunque él no lo demostró. Y que la primera demostración se debe a Eudoxo. Aunque las estimaciones eran suficientes para las cuestiones prácticas, las que principalmente preocupaban en Egipto y Mesopotamia, los matemáticos y geómetras griegos tenían una mentalidad similar a las de los científicos actuales. Querían demostraciones de las afirmaciones matemáticas. Sin embargo había una dificultad que hacía esta tarea más difícil de lo que pueda parecernos ahora: la existencia, demostrada por los Pitagóricos (siglo V a.C.), de cantidades inconmensurables (o irracionales) entre sí. Al igual que era sabido que el lado de un cuadrado es inconmensurable con su diagonal podía ocurrir que el área de un círculo lo fuera con su radio. Hay que desengañar a los alumnos de que la formulación del área de un círculo consistía para los griegos en la actual afirmación: el área y el radio al cuadrado están en proporción constante a cierto número, al que ahora llamamos  $\pi$ . Por el contrario se evitaba cuidadosamente toda mención a dicho número dado que no lo concebían como tal. El método de exhaustión (Elementos de Euclides X.1) estaba diseñado para sustituir, con absoluto

rigor en las demostraciones (de las magnitud de un área o volumen), a la idea intuitiva de "límite". El método de exhaustión no era un sistema para calcular aproximaciones, sino para efectuar demostraciones. Desde el descubrimiento de los inconmensurables la matemática griega distinguió entre números (naturales, fracciones) y magnitudes (segmentos, áreas, volúmenes) que no se representaban con números en las deducciones. Veamos, por ejemplo, cómo se enunciaba el teorema (Elementos de Euclides XII.2) sobre el área del círculo:

*"Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros"*

Más aún el concepto de razón entre dos magnitudes no era la de "número" sino similar a la de "cortadura de Dedekind" (Elementos Definición V,5). La idea de aproximar una curva, como la circunferencia, mediante polígonos de un número creciente de lados, por exceso y por defecto, (método de exhaustión) se atribuye a Eudoxo de Cnido (nacido en el 408 a. C.). Más concretamente Eudoxo formula la siguiente idea: dada la figura curvilínea  $A$ , para determinar su área  $a(A)$  se busca una sucesión de polígonos, por exceso y por defecto, que aproximen progresivamente el área de  $A$ . Se intenta demostrar que se puede encontrar polígonos en las sucesiones cuyo área difiera en una cantidad menor que otra prefijada y por tanto difiera del área buscada menos que esa cantidad prefijada. Es la aparición de la *idea fundamental* de límite. Un momento ideal para retomar este difícil concepto a nivel de 2<sup>o</sup>BACH.

Arquímedes de Siracusa (nacido en el 287 a.C.) llevó el arte de la exhaustión a su perfección calculando, con todo el rigor que podríamos exigir actualmente, las áreas y volúmenes de multitud de figuras. En su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro* Arquímedes encuentra la razón entre el volumen de una esfera y el de un cilindro del mismo radio y altura el diámetro. Tal razón es  $2/3$ . Análogamente demuestra que la razón entre sus áreas es  $2/3$ . Esto equivale a los enunciados modernos pero elude el nombrar el número  $n$ . En *Sobre las Espirales* define la curva espiral de

Arquímedes y encuentra que el área de una vuelta es un tercio del círculo correspondiente. En *Sobre la cuadratura de la parábola* demuestra que el área de un segmento parabólico es  $4/3$  de la del triángulo de igual base y altura. En *Sobre Conoides y Esferoides* generaliza lo tratado para la esfera a otras cónicas y cuádricas. En la obra *Sobre la medida de un círculo* demuestra que la razón de un círculo a su diámetro está comprendida entre  $223/71$  y  $22/7$ .

Llegados a este punto se pueden hacer algunos ejercicios para calcular el área de los polígonos regulares inscritos a un círculo ( $r = 1$ ) de 3, 6, 12,... ó de 4, 8, 16,... lados utilizando para las cuentas el cálculo del lado del polígono  $P_{2n}$  en función del lado de  $P_n$ . Esto sólo requiere un poco de geometría básica. Podemos comparar los resultados obtenidos con  $n$ . Hay que aclarar a los alumnos que todas estas cuentas presuponen la utilización de irracionales, radicales y notación decimal, cosas que los griegos jamás soñaron.

En todas estas obras Arquímedes utilizó el método de exhaustión de forma rigurosa. A pesar de todo ese rigor y esa perfección en sus demostraciones los trabajos de Arquímedes no indicaban, en la mayoría de los casos, como había podido llegar a imaginar o intuir los resultados que exponía. El método de exhaustión demostraba de una forma rigurosa, pero el resultado en sí era difícilmente imaginable. Cada teorema era una obra de ingenio totalmente diferente. Los métodos expuestos no eran generalizables. En el siglo XVII algunos autores, como Kepler o Cavalieri, observaron con cierta desesperación la ausencia de "*indicaciones*" sobre el método que había seguido Arquímedes para llegar a sus resultados. El misterio se aclaró en 1906 cuando el filólogo e historiador danés Johan Ludvig Heiberg recibió un aviso, gracias a una sistemática catalogación que se estaba realizando, sobre un palimpsesto en Constantinopla situado en la Iglesia del Santo Sepulcro. De dicho palimpsesto Heiberg extrajo, con grandes dificultades, varias obras de Arquímedes entre las cuales se encontró la llamada "*E*

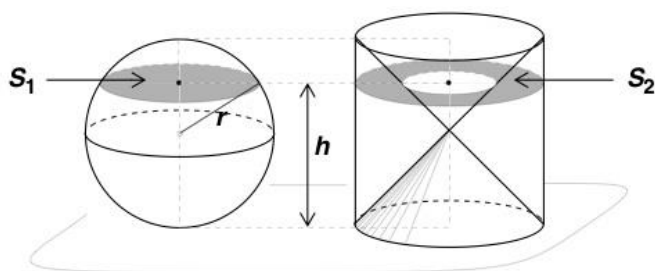
*Método*". Gracias al trabajo de Heiberg pudo ser rescatado en su práctica totalidad. En este libro Arquímedes explica cómo llegó, mediante razonamientos basados en la Mecánica, a sus intuiciones y descubrimientos. Aunque los razonamientos de "*El Método*" no fueran rigurosos, como el mismo admite en el preámbulo de la obra, reconoce que los resultados a los que se llegaba de esa forma eran correctos. "*El Método*" podría ser reformulado en el lenguaje del cálculo integral moderno sin grandes dificultades. En este punto se puede poner como bellísimo ejemplo de la formas de trabajo de Arquímedes su cálculo sobre el área de una vuelta de espiral (ver los detalles en la bibliografía). Esto puede servir para motivar fácilmente en el aula la idea de sumas superiores e inferiores.

## Unidad 2

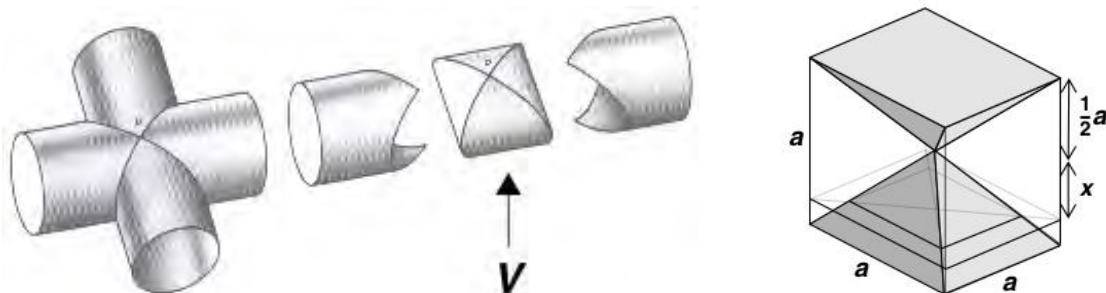
### Kepler, Cavalieri, Roberval y el método de los indivisibles.

Durante el siglo anterior a Newton las obras de Arquímedes influyeron poderosamente sobre las matemáticas. Se desarrollaron técnicas basadas en una idea de infinitesimal al que llamaban "*indivisible*". Se trataba de un concepto algo nebuloso y que recibió muchas críticas, bastante justificadas, por parte de unos y de otros, entre ellos el jesuita Paul Goldin. En 1649 el Colegio Romano rechazó los indivisibles y prohibió su enseñanza en los colegios Jesuitas. Johannes Kepler (1571-1630) fue uno de los que contribuyeron a estos desarrollos. El interés de Kepler por estos temas era práctico y se cuenta que surgió a raíz de la boda con su segunda esposa. El procedimiento que utilizaban los mercaderes para cubicar los barriles le pareció poco exacto. En su libro "*Nova Stereometriadoliorumvinariorum*" calcula áreas y cubica numerosos cuerpos, especialmente cuerpos de revolución, pues los toneles eran su principal interés. Kepler consideraba una disección del sólido en un número infinito de piezas infinitesimales o indivisibles, adaptada a cada caso, para luego sumarlos de forma que obtenía el volumen. Kepler entendía que sus indivisibles eran volúmenes infinitesimales y su preocupación por dar demostraciones rigurosas, como las de Arquímedes basadas en el método de exhaustión, era escasa. El

jesuita Bonaventura Cavalieri(1598-1647),continuando con las ideas de Kepler, desarrolla en su obra "*Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota*" una técnica para el cálculo de cuadraturas y cubaturas denominada el método de los indivisibles. En este método el área de una figura plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos equidistantes, cada uno de los cuales se interpreta como un rectángulo infinitamente delgado; y un volumen se lo considera compuesto por un número infinito de áreas de figuras planas paralelas. Por supuesto no explica cómo puede ser que los indivisibles de volumen cero den lugar a un cuerpo con volumen no nulo, cosa que sólo se justificaría posteriormente con el paso al límite que da la teoría de la integral. Llegados a este punto tenemos dos bellos ejemplos, que suponen poco esfuerzo en el aula, de cómo aplicar este método a casos prácticos. El primero nos lleva al volumen de la esfera: las secciones de una esfera tienen el mismo área que las secciones de un cilindro, de igual radio y altura que la esfera, menos un doble cono -o diábolo- de igual radio e igual altura (el área de  $S_1$  es igual a la de  $S_2$ ):

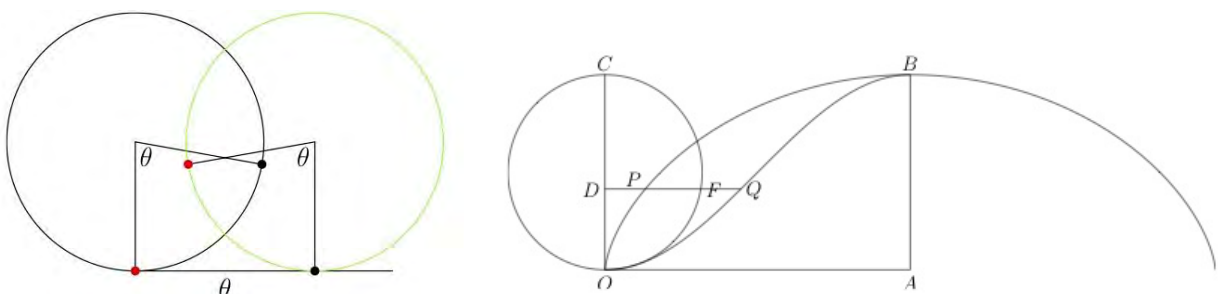


Otro ejemplo, maravilloso, ya citado por Arquímedes en "*El Método*", es el siguiente: en un cubo de lado  $a$ , es inscrito un cilindro, que tiene sus bases en caras opuestas, y cuya superficie toca los otros cuatro planos, y en el mismo cubo es inscrito otro cilindro, que tiene sus bases en otros cuadrados y cuya superficie toca los otros cuatro planos, entonces el sólido limitado por las superficies de los dos cilindros, es dos tercio del cubo:



Para demostrarlo Cavalieri comprueba que las áreas de las secciones de  $V$  son iguales a las de un cubo, en el que se inscribe  $V$ , menos la de una doble pirámide cuadrada con vértice en el centro del cubo, lado el mismo que el cubo y alturas la mitad del lado.

Giles Personne de Roberval (1602-1675) desarrolla métodos bastante eficaces en su obra "*Traité des indivisibles*" (publicada en el año 1693 como parte de "*Divers ouvrages de mathématique et de la physique par messieurs de l'Académie Royale des Sciences*"). Roberval hace hincapié en que sus métodos reposan más en los de Arquímedes que en los de Cavalieri, a los cuales critica por su falta de rigor (aunque tampoco él facilita demostraciones rigurosas). En su "*Traité des indivisibles*" Roberval consigue la cuadratura del área limitada por  $y=x^q$ , con  $q$  racional, y también la de un lóbulo de  $y=\text{sen}x$ . Antes de 1636 demuestra que el área bajo un bucle de cicloide es tres veces la del círculo generador correspondiente y consigue también cubicar el cuerpo de revolución que genera la cicloide. Logra con sus técnicas la cuadratura del área lateral de un cono oblicuo en 1644. Calcula la longitud de los arcos de espiral y de parábola. Consigue una relación entre las longitudes de la elipse y la cicloide generalizada (es decir si se puede calcular una, de inmediato se podría también la otra). Es de destacar que sus cálculos de longitudes suponen el primer avance después de los griegos. Como ejemplo para llevar al aula podemos escoger el cálculo del área de un bucle de cicloide basado en indivisibles:



Consideramos círculos de radio 1. Los puntos rojo y negro sobre el círculo negro van a parar, al rodar, a los puntos rojo y negro en el círculo verde. Si las coordenadas del punto rojo en el círculo negro son  $(0,0)$  entonces las coordenadas del punto rojo en el círculo verde son  $(\theta - \text{sen}\theta, 1 - \text{cos}\theta)$ .

En la figura  $P$  es un punto de la cicloide y  $F$  es el punto a igual altura sobre el círculo.

El punto  $Q$  se escoge de tal forma que  $DF$  es de la misma longitud que  $PQ$  (es decir segmentos indivisibles iguales).

Así si  $P = (\theta - \text{sen}\theta, 1 - \text{cos}\theta)$  y  $F = (\text{sen}\theta, 1 - \text{cos}\theta)$  se tiene que  $Q = (\theta, 1 - \text{cos}\theta)$ .

El área del rectángulo  $OABC$  es  $2\pi$ . El área a la derecha de  $\{(\theta, 1 - \text{cos}\theta) / 0 \leq \theta \leq \pi\}$  por simetría es  $\pi$ .

El área a la izquierda de  $F$  y a la derecha de  $D$ , es la de un semicírculo esto es  $\pi/2$ .

Por ser sus indivisibles iguales a las de e) el área a la izquierda de  $Q$  y a la derecha de  $P$ ,  $P$  y  $Q$  variando, es  $\pi/2$ .

Así el área a la derecha de  $P$  en el rectángulo  $OABC$  es  $3\pi/2$  y el área total bajo la cicloide es  $3\pi$ .

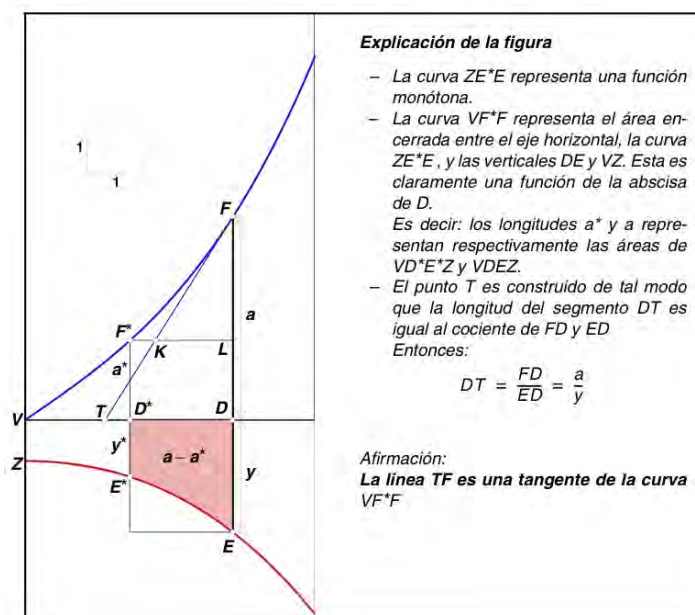
### Unidad 3

#### Barrow, Newton, Leibnitz y la relación entre cuadraturas y tangentes.

En la historia del cálculo de cuadraturas han existido dos corrientes muy profundas. Por una lado el método de exhaustión, una base firme, con todo su poder para demostrar con rigor sus afirmaciones, pero con el hándicap de que no era posible dejar volar la imaginación sobre éste. Por otro lado todos los métodos basados en una certera intuición, como el mecánico de

Arquímedes o el de los indivisibles, practicados por Kepler, Cavalieri , Roberval ,iy también por Arquímedes en "El Método"!, que conseguían magníficos resultados, pero dejaban insatisfechas a las mentes inquietas. El cálculo integral de Newton y Leibniz consigue juntar las dos corrientes en una gran río armonioso reuniendo así lo mejor de ambas corrientes, exhaustión y teoría de indivisibles.

Isaac Barrow (1630-1677) fue profesor de Newton y le precedió en la Cátedra Lucasiana. Es notable señalar que Barrow fue el primero en darse cuenta de la asombrosa relación entre "tangentes" y "áreas", antes de 1665, en contra de lo que solemos imaginar cuando, a veces, se le atribuye a Newton. En su libro "Geometrical Lectures" nos propone el siguiente teorema:



La fórmula que antecede a la afirmación final puede ser reinterpretada así  $y = \frac{a}{DT}$  ; es decir la ordenada de la función,  $y$ , es igual a la pendiente de la tangente, en el punto correspondiente, a la grafica que nos da el área de la función ZE\*E. Esto es precisamente la formulación del Teorema Fundamental del Cálculo en un lenguaje geométrico. La demostración de Barrow es también totalmente geométrica:

Supón que  $K$  es un punto de  $TF$  entre  $T$  y  $F$ . Hay que demostrar que  $K$  es un punto a la derecha de la curva  $VF^*F$ .

Por la semejanza de los triángulos  $KLF$  y  $TDF$  vale:  $\frac{FL}{LK} = \frac{FD}{DT} = DE = y$ , entonces  $FL = LK \cdot y$  (I)

De otro lado:  $FL = a - a^* = \text{área } VDEZ - \text{área } VD^*E^*Z = \text{área } D^*DEE^* < D^*D$ . y (II), iya que la curva  $ZE^*E$  representa una función monótona!

De (I) y (II) se sigue  $LK < D^*D$ , y entonces  $LK < LF^*$

Así sabemos que  $K$  está a la derecha de la curva  $VF^*F$ .

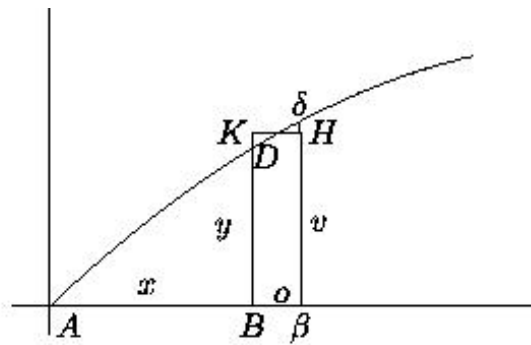
Si prolongamos la recta  $TF$ , podemos demostrar de modo análogo que cada punto de la parte prolongado está a la derecha de  $VF^*F$ . Por lo tanto todos los puntos de la recta, excepto  $F$ , están a la derecha de la curva y eso significa que  $TF$  es la tangente de la curva en  $F$ .

Es difícil entender como pudo establecer Barrow su teorema dado que su estilo conecta con dificultad con los desarrollos de sus predecesores. Sin embargo el cálculo diferencial de Newton, con su idea de variables infinitesimales, conecta de forma más natural con la idea de indivisibles. Isaac Newton (1643-1727) descubrió los fundamentos de su Cálculo Diferencial e Integral entre 1665 y 1666. En 1669 circuló en inglés una primera versión de su obra "*De Analysi*" que luego se publicaría en latín en 1771. En este libro aborda el Teorema Fundamental en un forma muy similar a la actual Como ejemplo veamos algunas palabras y una figura de dicha obra:

*De acuerdo con la figura sean  $z = \text{área}(ABD)$ ,  $y = BD$ ,  $x = AB$ ,  $B = o$ .*

*Elijamos ahora  $v = BK$  de tal manera que*

*área  $(BD = \text{área } (BKH) = ov$ .*



Gotfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) data sus trabajos sobre cálculo integral, casi con seguridad independientes de los de Newton y Barrow, entre octubre y noviembre de 1675. Una de sus aportaciones fue el uso de los símbolos actuales  $\int dx$  para la integral y la diferencial haciendo el trabajo matemático mucho más intuitivo y efectivo al usar símbolos sugerentes. El hecho es que Leibniz pensaba que la manera de simbolizar los conceptos es importante. Y la matemática contemporánea ha hecho totalmente suya esa idea. No hay más que abrir un libro de matemáticas editado en el siglo XX para darse cuenta de la importancia que dan los matemáticos a la estética de sus textos.

Hay hechos, esto puede ser expuesto en el aula ya que los alumnos conocen las derivadas, que inducen a pensar que existe una relación entre derivada y área. Nunca sabremos si esos hechos fueron inicialmente considerados por Newton o si le ayudaron a formular el cálculo. Está a la vista que la derivada (respecto del radio  $r$ ) de la fórmula que nos da el área de un círculo,  $\pi r^2$ , es  $2\pi r$ , la longitud de su contorno. Asimismo la derivada del volumen de una esfera,  $\frac{4}{3}\pi r^3$ , respecto a  $r$  es  $4\pi r^2$ , que es su área. Y que ésto no nos prueba nada es obvio, pero es un indicio de que existe una relación entre el área de un recinto y su borde. Para los polígonos regulares deberemos poner área y perímetro en función de la apotema si deseamos obtener resultados análogos. En el caso de un cuadrado, por ejemplo, su área es  $4a^2$  y su perímetro  $8a$ . Pero aún es más interesante para la introducción del cálculo observar algunos casos muy sencillos del Teorema

Fundamental. Si tomamos la función constante  $f(x) = c$  y vemos el área del rectángulo que deja entre  $0$  y  $x$  sobre el eje  $x$  la fórmula que sale es  $cx$  cuya derivada es  $c$ . Asimismo si tomamos  $f(x) = x$  y vemos el área del triángulo entre  $0$  y  $x$  sobre el eje  $x$  la fórmula que sale es  $\frac{x^2}{2}$  cuya derivada es  $x$ . Por último si tomamos  $f(x) = ax+b$  entre  $0$  y  $x$  sobre el eje  $x$  nos sale un trapecio de área  $\frac{ax+b+b}{2} \times x = \frac{ax^2+2bx}{2} = \frac{ax^2}{2} + bx$  cuya derivada es obviamente la función de partida. Estos tres ejemplos del teorema fundamental, junto con los anteriores, conectan los conocimientos básicos de los alumnos con el objetivo de exponer el Teorema Fundamental. De pasada se puede retar a los alumnos a que calculen, extrapolando estas ideas, el área bajo un parábola. A partir de aquí introduciremos, sin forzar en exceso, los conceptos de suma inferior y superior, y el de integral (de Riemann para funciones continuas, o a lo sumo continuas a trozos, y subintervalos de igual longitud). Es importante avisar a los alumnos desde el principio que la integral y el área no son lo mismo; hay que poner ejemplos de funciones que, al cambiar de signo, dan una integral igual a la suma, con signo, de las áreas. Luego pueden exponerse, mejor con ejemplos que con demostraciones formales, las propiedades lineales y aditivas de la integral.

Inmediatamente después podremos dar una demostración (la gráfica en esta demostración es *importante*) del Teorema Fundamental para la integral de una función continua. Es interesante exponer como principio de la demostración el siguiente resultado, que siempre se da por obvio, y cuya demostración es muy sencilla:

Si  $f(x)$  es integrable en  $[a,b]$  y  $m \leq f(x) \leq M$  entonces  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Observaciones sobre el Teorema Fundamental: 1) la representación gráfica cartesiana es imprescindible para imaginar/formular el teorema, 2) el concepto de indivisible prepara claramente el de rectángulo cuya base tiende a cero y 3) la integral es una forma particular y precisa del método

de exhaustión aplicable a situaciones muy generales. Por lo tanto podría decirse que el Teorema Fundamental es la *guinda* que culmina todos los progresos anteriores de cálculo de cuadraturas. Para finalizar demostraremos a los alumnos la regla de Barrow y la aplicaremos a casos sencillos de áreas en que se pueda calcular la primitiva con la tabla de derivadas y poco más.

La del Teorema Fundamental es una de las pocas demostraciones que considero esenciales en 2º BACH por ser un ejemplo de cómo una idea, la derivada, que inicialmente está pensada para un problema, la Dinámica, acaba teniendo resonancias en otros campos diferentes. La *resonancia* es uno de los principales indicadores del valor de una idea científica. Las buenas ideas, una vez formuladas, adquieren vida propia y resuelven otros problemas muy diferentes al que le dio origen.

#### Unidad 4

##### Las técnicas de derivación y los métodos de integración.

Debemos evitar dar la impresión de que los métodos de integración se basan en ideas felices o en si "*toca la flauta*". Para ello lo mejor es empezar dando una visión general del trabajo que se va a realizar y por qué se va a realizar así. Cada técnica de integración está fundamentada en alguno de los aspectos del cálculo de derivadas:

#### DERIVACIÓN

*Tabla de derivadas*

*Suma  $(f \pm g)' = f' \pm g'$*

*Producto  $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$*

*Composición  $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$*

#### TÉCNICA DE INTEGRACIÓN

*Integrales inmediatas /tipos*

*Descomposición en sumando/  
racionales*

*Integración por partes*

*Integración por cambio de  
variable*

Nuestra propuesta es ir entremezclando las técnicas de integración con cálculos efectivos de áreas a lo largo de la lección. Los ejemplos pueden incluir áreas bajo una gráfica, entre dos o entre varias gráficas. Podemos dejar otras aplicaciones diferentes que las áreas para después de finalizar la exposición de las técnicas e incluirlas en una unidad aparte. De cualquier forma debe de quedar claro a lo largo de todo el tema que el objetivo no son las *técnicas* de cálculo de primitivas sino las aplicaciones del cálculo integral a multitud de asuntos. Un punto de la mayor importancia es explicar a los alumnos que la derivación lleva de funciones conocidas (elementales) a combinaciones más o menos complicadas de funciones conocidas (elementales). Por el contrario la integración lleva de funciones elementales a una nueva galaxia de funciones no elementales y, en principio, desconocidas hasta que se estudian a fondo. Ejemplos: elípticas, Bessel, hipergeométricas, etc.

Podemos considerar las integrales inmediatas cómo un entrenamiento básico para desarrollar las habilidades. Hay que tener en cuenta que los alumnos han aprendido a derivar pero todavía tienen que conseguir una familiaridad suficiente con esta herramienta fundamental. Creemos que al principio es bueno indicar de qué tipo de inmediata se trata, potencial, exponencial, etc. para pasar después a mezclar todos los tipos sin indicación alguna. Este es un juego al que los alumnos se prestan con facilidad. Una idea importante es la de reducir una integral conocida a tipos conocidos (inmediatas) mediante manipulaciones adecuadas.

En cuanto a la descomposición en sumandos hay que decir desde el comienzo que es la técnica más básica y que se aplica de continuo (los polinomios son el ejemplo más a mano). El hecho de que las funciones racionales descompongan en suma de fracciones simples es harina de otro costal y se debe dejar para después.

La integración por partes es complicada para la mayoría de alumnos debido a la confusión en la elección de partes. Lo que para el profesor es obvio, debido a su experiencia, no lo es en absoluto para el alumno. En el trabajo de aula se debe permitir el error al elegir las partes porque en este asunto se aprende más de los errores que de los aciertos. Integrales en que parece imposible aplicar *por partes* porque sólo “aparece” una parte como  $\int \ln x dx$ . Integrales por partes que terminan dando, después de varios pasos, la misma integral (cíclicas), como por ejemplo  $\int e^{mx} \sin(mx) dx$ . Una de las *por partes* más interesantes es la que relaciona la longitud de un círculo con su área (antes hay que explicar longitudes de curvas). Si  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  es la función que nos da el semicírculo superior de radio 1 entonces  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$  y podemos definir después de algunos cálculos sencillos  $p = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  como la longitud del semicírculo. Si evaluamos ahora el área del semicírculo obtenemos:

$$A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = p - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Hacemos ahora la última integral por partes:

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x\sqrt{1-x^2} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = 0 + A$$

y así conseguimos la igualdad  $A = p - (0 + A)$  y, por tanto,  $A = p/2$

No es necesario desarrollar demasiado la integración por cambio de variable en el nivel de 2ºBACH. Es suficiente poner unos cuantos *buenos* ejemplos de cómo funciona el método. También es importante advertir a los alumnos de que debemos llevar cuidado con lo que escribimos. Supongamos que queremos hacer la integral:

$$\int f(x) dx$$

mediante el cambio de variable  $x = g(t) \quad dx = g'(t)dt \quad t = g^{-1}(x)$

Estrictamente hablando no podemos escribir  $\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$  ya que las funciones a ambos lados de la igualdad tiene distinta variable; sin embargo si que podemos escribir  $\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt$

porque se trata de la igualdad de dos números reales.

En relación a las integrales de funciones racionales, las más complicadas de este nivel, se debe comenzar mostrando una analogía con las fracciones numéricas. Por ejemplo la fracción  $4/21$  tiene un denominador compuesto  $7 \cdot 3$  pero podemos descomponerla en suma de dos fracciones más "simples"  $a/3 + b/7$ . Sin casi esfuerzo calculamos a y b quedando  $4/21 = -1/7 + 1/3$ .

A continuación podemos mostrar a los alumnos cómo las fracciones algebraicas que llamamos "simples" se pueden integrar de forma inmediata, o con algunas manipulaciones que las hacen inmediatas. Ya refiriéndonos al cálculo de los numeradores de las fracciones simples se puede recurrir a la sustitución de la variable por raíces del denominador, u otros valores que lleven a un sistema lo más sencillo posible, o bien igualar los coeficientes polinómicos de los numeradores o bien seguir un sistema híbrido de ambos.

Es esencial que comprendan que si una raíz es múltiple, por ejemplo de multiplicidad 3, no pueden saltarse las fracciones con denominadores de grados 3, 2 y 1. Se debe ver, con un ejemplo, que este típico error nos lleva a un sistema de ecuaciones incompatible. Todavía mejor es hacerles comprender que, por ejemplo,  $5/12$  no puede ser suma de dos fracciones "simples"  $a/2 + b/3$  ya que si escribimos  $5/12 = a/2 + b/3$  esto conduce a  $5 = 2(3a + 2b)$  lo que implica que 5 es par.

## Unidad 5

### Más allá de las áreas: volúmenes, longitudes, centros de masa, medias

Podemos comenzar con los volúmenes de revolución, que involucran integrales sencillas en varios ejemplos importantes, y seguir con otros volúmenes no tan sencillos como el ejemplo, ya mostrado por Cavalieri, de la intersección de dos cilindros. Respecto a las longitudes sólo es factible resolver las integrales de un arco de círculo, un arco de parábola y un arco de espiral sin entrar en funciones no elementales. En cuanto a los centros de masa es factible hacerlo para polígonos, segmentos y sectores circulares, segmentos parabólicos, etc. En el tema de las medias es posible poner un ejemplo muy interesante a nivel conceptual, y con pocos cálculos farragosos, la *vida media* de un elemento radioactivo cuya *semivida* se conoce.

Los volúmenes de revolución más básicos son el cilindro, el cono y la esfera. A continuación se puede hacer la sección esférica (radios  $R$ ,  $r_1$  y  $r_2$ ) el balón de rugby (elipsoide de semiejes  $a$  y  $b$ ), disco (elipsoide de semiejes  $b$  y  $a$ ), el neumático (toro de radios  $r$  y  $R$ ) y el barril limitado por dos tapas de radio  $r$  y un arco de círculo de radio  $R$  cuyo centro esté situado a distancia  $d$  del eje de giro. Otros volúmenes que pueden calcularse por secciones sin ser de revolución son la intersección de dos cilindros de igual radio,  $R$ , con ejes que se cortan a ángulo  $\alpha$ . Y, por supuesto, el elipsoide de semiejes  $a$ ,  $b$ , y  $c$ . Y también la barca volteada: consideramos la intersección de dos círculos de radio  $R$ , una hoja, y sobre el eje de simetría de la hoja secciones triangulares cuya base, perpendicular al eje de simetría, es la anchura de la hoja en ese punto. El problema se puede plantear con todos los triángulos (secciones) semejantes, o con los triángulos de altura variable en función de la posición.

La explicación intuitiva de los elementos diferenciales de longitud es sumamente sencilla y un ejemplo ideal de las manipulaciones que suelen realizarse en cálculo integral. La longitud del arco de parábola sólo depende de una primitiva inmediata, la del arco-seno-hiperbólico. Aunque estas funciones no se suelen explicar en bachillerato son tan, o más, sencillas que las circulares (por supuesto explicarlas lleva su tiempo, tiempo del que no se suele disponer). Como ejemplo tomemos el arco de parábola  $f(x) = x^2$  entre 0 y 1:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \{\text{cambio de variable } 2x = t\} = \int_0^2 \sqrt{1+t^2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsenht} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arcsenh}2$$

La longitud de un arco de círculo es análoga a la anterior con la diferencia de usar inversas de funciones circulares. Como ejemplo tomemos el cuarto de círculo  $x^2+y^2 = 1$  entre 0 y 1:

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen}x \Big|_0^1 = \operatorname{arcsen}1 = \frac{\pi}{2}$$

La longitud del arco de espiral de Arquímedes necesita la introducción de las coordenadas polares, pero la integral a la que conduce es análoga a la de la parábola. Como ejemplo podemos tomar la longitud de media vuelta de la espiral  $r(\alpha) = k\alpha^2$  desde 0 a  $\pi$ :

$$l = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\alpha)+r'(\alpha)^2} d\alpha = \int_0^\pi \sqrt{(k\alpha)^2+k^2} d\alpha = k \int_0^\pi \sqrt{1+\alpha^2} d\alpha = k \operatorname{arcsenh}\alpha \Big|_0^\pi = k \operatorname{arcsenh}\pi$$

En cuanto a los centros de masa creemos que los más simples, pero con suficiente interés como ejemplos, son el cono de radio  $r$  y altura  $h$ , el alambre semicircular de radio  $r$  y el semicírculo de radio  $r$ . Las integrales que conllevan son muy sencillas pero la explicación del concepto de centro de masa debería estar bien asentado en la asignatura de Física, ya que no es posible dedicarle tiempo en Matemáticas. Hagamos aquí la de un cono homogéneo.

Consideramos el cono como el cuerpo de revolución de la recta  $f(x) = (r/h)x$ , donde  $r$  y  $h$  son el radio y la altura, girando alrededor del eje  $Ox$ , desde  $0$  hasta  $h$ . Por simetría la posición del centro de masa estará en el eje  $Ox$ . Para calcular su posición hay que hacer la siguiente integral:

$$\int_0^h x \pi (r/h)^2 x^2 dx = \pi (r/h)^2 \frac{x^4}{4} \Big|_0^h = \frac{\pi}{4} r^2 h^2 \quad \text{y dividir por } 1/3\pi r^2 h^2 \text{ (la "masa" total), quedando } x = 3/4 h$$

Finalmente calculemos la vida media de un átomo de un elemento radioactivo que se desintegra con un periodo de semivida de  $T$  años. Se trata de un problema en el que pasamos del concepto de media de un conjunto discreto a otro en el que se considera, dada el enorme número de átomos, la media de un conjunto infinito continuo. Si tenemos una masa inicial  $M$  la masa que quedará al cabo de  $t$  años viene dada por  $m(t) = M \exp(-\ln 2 t/T)$ . La masa de átomos que se desintegra en el "instante"  $t$  viene dada por  $|m'(t) dt|$  por lo tanto multiplicaremos por  $t$  y "sumaremos" entre los tiempos  $0$  e  $\infty$  dividiendo el resultado por la masa total (número total de átomos)  $M$ :

$$\frac{1}{M} \int_0^{\infty} t M \exp(-\ln 2 \frac{t}{T}) (\frac{\ln 2}{T}) dt = \{ \text{cambie variable } \frac{\ln 2}{T} t = z \} = \frac{T}{\ln 2} \int_0^{\infty} z \exp(z) dz$$

La última integral se puede hacer fácilmente "por partes". "Sustituyendo" luego por  $0$  e  $\infty$  obtenemos como resultado de la integral impropia  $1$  (cabe aquí exponer, sin pretensiones, que la integral impropia es el límite de una integral normal o propia). Por lo tanto la vida media de la población de átomos es el periodo de semivida dividido por  $\ln 2$ . Un resultado sumamente enigmático.

## Bibliografía

Recursos pntic [Mesopotamia](#)

Claudia Andrea López [El infinito en la historia de las Matemáticas](#)

Martin Kindt [La historia de las matemáticas en la enseñanza del Análisis](#)

Euclides59 [El área y la integral](#)

Integral definida (presentación)

[ficus.pntic.mec.es/igas0008/matematicas/INTEGRAL%20DEFINIDA.pps](http://ficus.pntic.mec.es/igas0008/matematicas/INTEGRAL%20DEFINIDA.pps)

Arquímedes de Siracusa [El Método](#)

Bonaventura Cavalieri [Geometriaindivisibilibus](#)

## EN EL CENTENARIO DE MIGUEL DE CERVANTES

### CERVANTES Y LAS MUJERES

Juan Gutiérrez Rodríguez

Profesor de Lengua Castellana y Literatura IES "Albayzín" - Granada

En esta época, cuando es raro el día en que no aparece una noticia sobre el asesinato o ataque hacia alguna mujer por parte de su pareja o expareja, debido a diferentes causas, pero sobre todo por no aceptar que la mujer es un ser libre y dueño de su destino, y en este año que celebramos el cuarto centenario de la muerte de Don Miguel de Cervantes Saavedra *"la mayor y mejor pluma que en español han visto los siglos pasados ni esperan ver los venideros"*, en este año, digo, cobra mayor actualidad la defensa que de la mujer, como ser autónomo y libre, se hace en *El Quijote*, concretamente en el capítulo XIV de la primera parte, durante el discurso que la pastora Marcela hace ante los pastores que la acusan de ser la causante de la muerte de Grisóstomo. En el momento del entierro aparece ella y ante el estupor de los presentes pronuncia el siguiente discurso:

*"No vengo [...] sino a dar a entender cuán fuera de razón van todos aquellos que de sus penas y de la muerte de Grisóstomo me culpan; y, así, ruego a todos los que aquí estáis me estéis atentos, que no será menester mucho tiempo ni gastar muchas palabras para persuadir una verdad a los discretos. Hízome el cielo [...] hermosa, y de tal manera, que [...] a que me améis os mueve mi hermosura y por el amor que me mostráis decís y aún queréis que esté yo obligada a amaros. Yo conozco [...] que todo lo hermoso es amable; más no alcanzo que, por razón de ser amado por hermoso esté obligado a amar a quien le ama [...] y, según he oído yo decir, el verdadero amor no se divide, y ha de ser voluntario y no forzoso. Siendo esto así [...] ¿Por qué queréis que rinda mi voluntad por*

fuerza? [...] La hermosura en la mujer honesta es como el fuego apartado o como la espada aguda, que ni quema ni ella corta quienes a ellos se acerca. La honra y las virtudes son adornos del alma [...] Pues si la honestidad es una de las virtudes que al cuerpo y al alma más adornan y hermosean ¿Por qué la ha de perder la que es amada por su hermosura, por corresponder a la intención de aquel que, por su solo gusto, con todas sus fuerzas e industrias procura que la pierda? **YO NACÍ LIBRE** y para poder vivir libre escogí la soledad de los campos [...] A los que he enamorado con la vista, he desengañado con las palabras; y si los deseos se sustentan con esperanzas, no habiendo yo dado alguna a Grisóstomo, ni a ningún otro [...] bien se puede decir que antes lo mató la porfía que mi crueldad [...] El cielo aún hasta ahora no ha querido que yo ame por destino, y pensar que tengo que amar por elección es pensar en vano. Este general desengaño sirve a cada uno de los que me solicitan de su particular provecho; y entiéndase de aquí adelante que si alguno por mí muere, no muere por celoso ni desdeñado, porque quien a nadie quiere a ninguno debe dar celos [...] El que me llama fiera y basilisco, déjeme como cosa perjudicial y mala; el que me llame ingrata, no me sirva [...] que esta ingrata, esta fiera ... ni los buscará, conocerá servirá, ni seguirá de ninguna manera [...] Si yo conservo mi limpieza con la compañía de los árboles ¿Por qué ha de querer que la pierda el que quiere que la tenga con los hombres? Yo tengo riquezas propias, tengo libre condición, ni quiero ni aborrezco a nadie...”

A lo que respondió Don Quijote:

- “Ninguna persona, de cualquier estado y condición que sea, se atreva a seguir a la hermosa Marcela, so pena de caer en la furiosa indignación mía”

El discurso de Marcela –*summa de bachillería*– podría resumirse en los siguientes puntos

- Que el ser hermosa no la obliga a corresponder a quienes la cortejaban.
- Que ella nació libre y para poder seguir siéndolo escogió la soledad de los campos.
- Que ella nunca había alentado los amores de ninguno de quienes la habían pretendido.

El discurso se cierra, como veíamos arriba, con don Quijote eximiendo a Marcela de toda culpa en relación con la muerte de Grisóstomo y sancionando lo intachable de su conducta.

¿Podría representar esta idea de respeto hacia la mujer como ente libre y autónomo el pensamiento de Cervantes? Y si es así ¿Cómo habría llegado a esta forma de pensar en un siglo en el que las mujeres eran tan poco importantes?

Aunque *Américo Castro*, en *El pensamiento de Cervantes*, ha analizado la influencia de Erasmo en Cervantes y cómo todo lo referido a la locura del protagonista y a la exaltación de la mujer (quien en la época se consideraba que no tenía alma), yo me inclino a creer que sí sería tal su convicción. A continuación expondré las causas que podrían haber hecho pensar así a nuestro héroe. Me centraré simplemente en los ejemplos que le dieron las mujeres de su familia a lo largo de su vida.

Echemos la vista atrás y situémonos en Valladolid, el dos de julio de 1552, cuando su padre Rodrigo, al no poder pagar unas deudas ni tan siquiera los intereses, se vio desalojado de su casa y al ir la justicia a embargarle los bienes, su abuela paterna, doña Leonor de Torreblanca, salvó lo que pudo diciendo que eran de su propiedad.

Sus hermanas Andrea y Magdalena tuvieron relaciones amorosas con diferentes personalidades de la época, algunos de ellos casados, que les hicieron promesas, cumplidas por unos y por otros no. Sin duda

contribuyeron a la supervivencia de la familia en los momentos de necesidad, que no fueron pocos. También algunos de estos amantes proporcionaron cartas de recomendación a Miguel, como fue el caso del amante de Andrea, el italiano Francesco Locadello, quien le entregó una que le permitió entrar al servicio de quien fue el cardenal Acquaviva. Estas relaciones que mantenían sus hermanas no suponían menoscabo de su fama, al menos en los ambientes en los que se movían los Cervantes.

Ya en el cautiverio, en Argel, sería fundamental para su liberación la labor de su madre y hermanas. Tenemos que tener en cuenta que para el rescate de los cautivos el Estado no quería saber nada y era labor de los familiares de los presos, y también de un par de Órdenes religiosas: Los trinitarios y los mercedarios.

Como Cervantes, al ser capturado por los piratas berberiscos, estaba en posesión de sendas cartas de recomendación, una de Don Juan de Austria y otra del duque de Sessa, sus captores pensaron que se trataba de una persona principal y pusieron a su cabeza un alto precio: quinientos ducados de oro. Si a ellos sumamos que también estaba cautivo su hermano menor, Rodrigo, tenemos que hacernos cargo de lo pesado que sería para su familia el recaudar el dinero para el rescate. No obstante, cuando su madre, doña Leonor de Cortinas, se enteró del cautiverio de sus dos hijos, se puso manos a la obra.

En primer lugar solicitó una ayuda al Consejo de Castilla, haciéndose pasar por viuda. Tiene éxito y le conceden un préstamo de sesenta ducados. Sus hermanas también hicieron lo que pudieron como se verá cuando, en su demanda al Consejo de Indias, el excautivo afirmará que sus hermanas sacrificaron su dote para rescatarlo.

Pero quien mayor actividad despliega es su madre. En 1578 pide al Consejo de Guerra autorización para exportar a Argel ocho mil ducados de mercancías del reino de Valencia y presenta una carta del duque de Sessa. En noviembre recibe del rey licencia de dos mil ducados, pero necesita un fiador pues no había devuelto los sesenta ducados que le prestaron anteriormente. Obtiene la prórroga de los sesenta ducados en marzo de 1579, el treinta y uno de julio se hace pasar de nuevo por viuda y entrega a fray Juan Gil, procurador general de la Orden de los Trinitarios, una suma de trescientos ducados, faltarían cuarenta y cinco que los pondrían los frailes.

Miguel de Cervantes tendría una sola hija pero no de su matrimonio con Catalina de Salazar, sino con una amante, Ana Franca, mujer casada, quien al morir dejó la hija, llamada Isabel, al cargo de Miguel, que a su vez la dejaría al cargo de su hermana Magdalena.

Como conclusión de su relación con las mujeres: un medio familiar marcado por una serie de situaciones adversas y penurias económicas, una sola relación confesada fuera de su matrimonio y un matrimonio fracasado. No obstante, podríamos decir, tras analizar todo lo referido a las mujeres de su familia, y para responder las preguntas que nos hacíamos con anterioridad, que la fuerza y el tesón de todas ellas para afrontar las adversidades que se les presentaron, podrían ser las causas que fijaran en su mente el valor de las mujeres por sí mismas.

## **“EL NIÑO VA A LA ESCUELA A APRENDER, NO A SER FELIZ”**



**Alberto Royo**  
es profesor de enseñanza  
secundaria.

Autor del libro "[Contra la nueva educación. Por una enseñanza centrada en el conocimiento](#)".

Reproducimos una entre-vista  
publicada en  
"La Vanguardia".

Sostiene en su libro Alberto Royo que la innovación puede llevar al traste la educación de una generación. *"En lugar de analizar la situación desde la realidad de la docencia, definir claramente los objetivos, detectar los errores, y buscar maneras de corregirlos, hemos optado por innovar y experimentar desde la distancia, las teorías vaporosas y el diletantismo educativo, despreciando la tradición sólo porque no implica modernidad, alterando los fines naturales de la instrucción pública y el papel del profesor"*. El profesor es la voz del sistema educativo que reclama colocar al centro de la educación no al alumno como sostienen las nuevas corrientes pedagógicas, sino al conocimiento y al docente. No está en contra de expresar las emociones, ni de usar tecnología, ni de aprender idiomas pero cualquiera de esos conocimientos no deben ser los objetivos en las aulas españolas.

### **¿Qué le preocupa de la renovación pedagógica?**

Me preocupa que podemos echar a perder determinados valores buenos que nos han servido desde el pasado y hasta ahora, como el conocimiento, la exigencia, el esfuerzo... Las nuevas tendencias parecen converger en un lugar en el que el conocimiento no está en el centro. Los niños han de ser felices, han de emprender, han de hablar idiomas...

### **¿Es incompatible aprender y ser feliz?**

Tenemos que establecer prioridades. Si creemos que el alumno debe aprender en la escuela aquellos conocimientos que no puede adquirir fuera haremos cosas distintas que si pensamos que lo importante es que sean felices, o se relacionen bien o empaticen. Todas estas metodologías no ponen el conocimiento en el centro del debate. Yo defiendo una enseñanza basada en el conocimiento como un acto de resistencia, de legítima defensa.

### **¿Se le exigen nuevas competencias al profesor?**

Se le piden cosas que no le competen. Siendo como es la función del docente compleja, lo más inteligente sería encontrar cierta naturalidad y sencillez a la hora de transmitir el conocimiento. Si nos despistamos con el plurilingüismo, la cultura financiera, la educación emocional, al final, ¿dónde queda el conocimiento de la asignatura que imparte el docente? Y luego yo, que soy músico, ¿para qué necesito una asignatura de educación emocional cuando mi propia asignatura perfectamente es capaz de desarrollar el gusto estético o

la sensibilidad artística? Tengamos claro cuál es el objetivo de la educación y para qué sirve un profesor.

**Reivindica el esfuerzo, la paciencia, la repetición, la atención, la memoria...**

Hoy suena antiguo hablar de silencio, capacidad de atención, disciplina, pero todo eso es esencial para aprender cualquier cosa. El profesor corrige los exámenes concentrado y en silencio. ¿Por qué no sirve eso al alumno? Ofuscamos lo evidente. Queremos que el mensaje sea lúdico, motivador, sugerente y perdemos de vista que el aprendizaje no siempre es divertido, y que, en todo caso, aprender es ya en sí mismo apasionante. Hoy ya no se ejercita la memoria. Se denosta la memoria recurriendo la lista de los reyes godos como si aún se recitara. En música, es esencial conocer las notas musicales y un intérprete memoriza las partitura. Hay que pasar muchas horas con el instrumento. Edulcorar el aprendizaje significa confiar poco en que es algo valioso.

**Las nuevas pedagogías defienden que los alumnos españoles no están bien formados habiendo recibido educación clásica. Por otra parte, los estudiantes van a necesitar competencias distintas cuando lleguen a adultos.**

No nos dejemos llevar por modas porque esas modas serán sustituidas. En esencia enseñar es lo mismo. Transmitir unos conocimientos que una persona sabe a otra que no sabe y quiere

aprender. Eso es indiscutible. ¿Hoy por alguna suerte genética se aprende de forma distinta? La respuesta es no.

**Quizás no haya que menospreciar la forma en la que las nuevas tecnologías están cambiando el mundo.**

Los avances tecnológicos sirvan para apoyar pero nunca para sustituir la que es principal herramienta que tiene el docente que es la palabra. Se habla de móviles pero luego coincidimos que no son capaces de mantener la atención en clase. ¿Se necesita capacidad de atención o estímulos constantes? Un alumno necesita ser capaz de atender a una persona que le habla. La motivación inicial de tener un móvil en clase en cuanto pasan unos días se convierte en una rutina y ya estamos en las mismas.

**Los avances en la neurociencia celebran el juego como forma de aprendizaje**

Eso tendría sentido en infantil pero en secundaria es absurdo. Unamuno decía que el profesor que quiere enseñar jugando acaba jugando a enseñar y el alumno que quiere aprender jugando acaba jugando a aprender. Los alumnos no quieren ir a clase. Ni hoy ni nunca. Pero no tienen madurez para decidir lo que pueden hacer. Hay que decirles que esto que no te apetece debes hacerlo por tu propio bien.

**¿Se les sobreprotege?**

Los adultos deben guiar y asumir la responsabilidad que les toca. El hijo no puede tomar el camino que quiera.

**¿Qué salva de las corrientes innovadoras?**

Cuestiono que sea bueno innovar. Un profesor ya innova en el aula.

### **¿Qué debería contener una buena ley de educación?**

Hoy se iguala a todos a la baja. Todas las personas deben tener la misma oportunidad en acceder a la educación pero después debemos saber que no todas llegarán al mismo punto. Es absurdo creer que todos somos iguales por mucho que Ken Robinson diga que tenemos distintos talentos. No todos tenemos la misma capacidad, el mismo coeficiente intelectual. Y por otro lado, una democracia avanzada debe tener un buen sistema público que permita el ascenso social a los alumnos desfavorecidos.

## “LA PEDAGOGÍA HA DEJADO LA ENSEÑANZA EN LOS HUESOS”

**Ricardo Moreno Castillo**

Catedrático de Matemáticas



Hace ya una década, Ricardo Moreno Castillo escribió un libro, el *Panfleto Antipedagógico*, en el que abogaba por aprender más cosas de memoria y criticaba «una enseñanza pretendidamente lúdica donde no se inculca el hábito de estudio». En [La conjura de los ignorantes. De cómo los pedagogos han destruido la enseñanza](#) (Pasos Perdidos), este catedrático de Matemáticas de instituto, ya jubilado, sigue argumentando en defensa de una enseñanza «rigurosa», «exigente» y «disciplinada», pero incide también en que la pedagogía es «una jerga, y no una ciencia», llena de «patochadas», «estupideces» y «desvaríos».

**¿Por qué dice que los pedagogos son «los que literalmente han acabado con la enseñanza pública en España»?**

La pedagogía es una jerga extravagante, y eso se ve a lo largo del libro, que es precisamente una antología de extravagancias pedagógicas. Y ese lenguaje vacío hace mucho daño porque ha vaciado la enseñanza hasta dejarla en los huesos. Le ha dado mucha importancia a las destrezas, las habilidades y la autoestima, pero no ha dado importancia ni a los contenidos ni al saber.

## **¿Los universitarios de ahora tienen peor nivel educativo que los de hace 30 años?**

Sin lugar a dudas. En primer curso de muchas ingenierías sería impensable poner problemas de Matemáticas que antaño resolvían estudiantes de 3º de BUP.

## **¿Qué opina del «aprender a aprender»?**

Es una insensatez. A aprender se aprende aprendiendo, igual que a nadar se aprende tirándose a la piscina. No hay algo así como un «aprender a aprender a nadar» que luego te permita aprender a nadar. Además, si para aprender es preciso «aprender a aprender», previamente habrá que «aprender a aprender a aprender», lo cual nos lleva a un retroceso al infinito de consecuencias metafísicas impredecibles.

## **¿Para qué sirven las facultades de Educación?**

Tal como están, para nada, y no hay más que ver el bajísimo nivel de quienes salen de ellas.

## **Dígame cinco cosas que cambiaría para mejorar la educación en España.**

Primero pondría un Bachillerato considerablemente más largo y riguroso. El PP había prometido un Bachillerato de tres años -un paso tímido, pero en la buena dirección-, pero no cumplió su palabra. Segundo, una FP más temprana para aquellos a quienes no les atraiga ese Bachillerato. Tercero, una reválida tras la enseñanza común y otra al finalizar el Bachillerato. Cuarto, enseñar cosas y contenidos: sin memoria no hay aprendizaje posible. Y quinto, el profesor ha de ser una autoridad y la disciplina, una exigencia irrenunciable.

## **En la era Google, ¿es más importante que los docentes tengan una buena base de conocimientos concretos o que se centren en aprender a cómo transmitirlos de forma eficiente?**

Google no es más que una gran enciclopedia en la que se pueden consultar datos puntuales. Pero nadie aprende Gramática, Latín, Matemáticas o Historia navegando por internet. La figura del profesor que sabe mucho y ama el saber sigue siendo imprescindible.

### **¿Por qué es importante la autoridad?**

La autoridad es indispensable porque nadie quiere ser educado; por eso se habla de «enseñanza obligatoria». Y, cuando a los profesores se les despoja de la autoridad, el resultado no es una alegre camaradería entre los estudiantes, sino la tiranía de los más gamberros sobre los demás.

### **¿Se han convertido en tabúes el esfuerzo y la excelencia?**

Son tabúes porque quienes van de políticamente correctos sostienen que la culpa del fracaso escolar es del sistema, como si todos los niños fueran buenos y trabajadores. Lamentablemente no es así, un niño puede ser vago y mala persona y, si ésto se disimula con el lenguaje políticamente correcto, nunca conseguiremos que deje de ser vago o mala persona.

### **¿Qué opina del cambio educativo que han hecho, por ejemplo, los jesuitas en Barcelona quitando libros de texto, asignaturas, horarios y exámenes, y de otras metodologías que están tan de moda últimamente, como la flipped classroom o aula invertida?**

Dicho así, parece un delirio impropio de una orden que ha dado tantos y tan buenos intelectuales. El estudio requiere organizar lo que se estudia (precisamente por medio de asignaturas), un estudio sistemático y ordenado (ésto es: horarios) y unos controles (exámenes).

### **¿Qué piensa de la educación emocional?**

Uno se educa emocionalmente, sobre todo entre los amigos y la familia, y en la escuela se ha de aprender aquello que ni la familia ni los amigos pueden enseñar. Ahora bien, también enseñando contenidos se pueden inculcar criterios morales y crear un ambiente donde los alumnos puedan hacer amistades y ayudarse unos a otros.

### **¿Cómo les decimos a los jóvenes que lo que importa es esforzarse cuando en este mundo en el que vivimos el esfuerzo ya no garantiza nada?**

Si quien se esfuerza no tiene nada garantizado, quien no se esfuerza lo tiene mucho menos. Y no hay aprendizaje que no requiera esfuerzo, trabajo y constancia.

### **¿Qué se hace con los alumnos que no quieren aprender?**

A quienes no les interesa una enseñanza más académica hay que darles otras alternativas, como puede ser la FP, pero no se les puede tener encerrados para que no dejen aprender a quienes sí quieren.

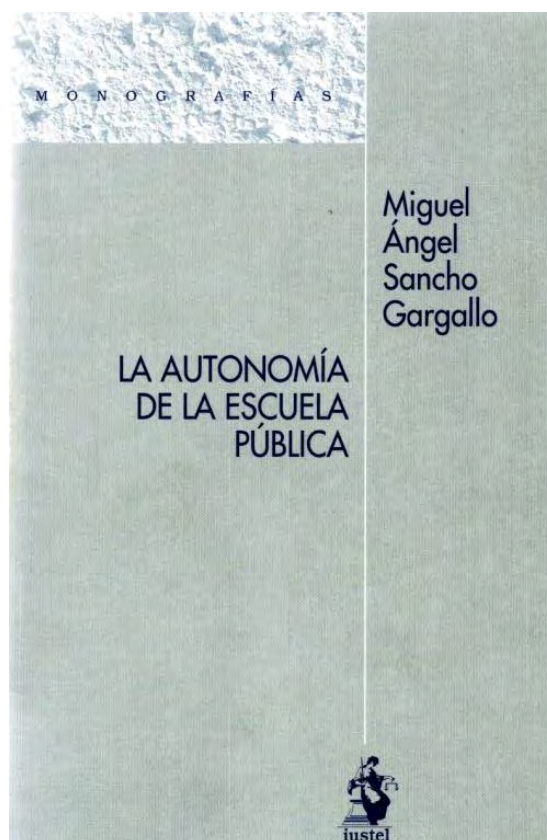
### **¿Tienen los alumnos españoles demasiados deberes?**

A mi juicio, hacen muchas tareas inútiles. Los trabajos de recortar y pegar llevan mucho tiempo, no son nada instructivos y pringan a toda la familia. Una redacción de pocas líneas, una suma de fracciones o memorizar un poema o la lista de los reyes de la Casa de Austria son cosas más útiles y llevan menos tiempo.

Entrevista publicada en "El Mundo"

## LIBROS

**Miguel Ángel Sancho Gargallo**, *La Autonomía de la Escuela Pública*



Este trabajo plantea hasta qué punto cabe la autonomía y, en consecuencia, una cierta diversidad y pluralismo entre los centros educativos públicos. Y para ello analiza a naturaleza jurídica de la escuela pública, a delimitación del concepto de autonomía y su realidad en los sistemas educativos, y la regulación de la autonomía en el derecho español vigente.

El estudio pone de manifiesto el alcance limitado de la proclamación formal de autonomía de los centros en e derecho positivo, y defiende un equilibrio en la consideración de lo público como ámbito de neutralidad y a la vez como espacio que refleja la pluralidad de nuestras sociedades. La autonomía debe conjuntarse con el principio de igualdad que garantiza el libre acceso a la educación y la igualdad de oportunidades.

El autor, Miguel Ángel Gallo, es el presidente de la Fundación Educación y Sociedad. Está editado por IUSTEL



**Felipe-José de Vicente Algueró, *De la Pepa a Podemos. Historia de las ideas políticas de la España Contemporánea.***

Los grandes cambios y transformaciones históricas que ha vivido España en los dos últimos siglos responden a factores intrahistóricos profundos, siendo uno de los más destacables el pensamiento político. Las ideas políticas inspiran los cambios y las reacciones a los mismos, movilizan partidos, organizaciones, círculos intelectuales y medios de comunicación que vierten su influencia en la opinión pública. Por eso, el conocimiento de estas ideas es clave para entender los hechos y acontecimientos históricos que han marcado la historia reciente de España así como los agentes que los han protagonizado. Este libro pretende de una manera rigurosa, pero didáctica y asequible a un público amplio, dar a conocer las grandes ideas políticas que han configurado España desde las Cortes de Cádiz hasta la actualidad, desde la irrupción inicial del liberalismo hasta los populismos recientes.

El autor es catedrático de Geografía e Historia.

## **NOTICIAS DE ANCABA**



### **ANCABA EN LA PERMANENTE DEL CONSEJO ESCOLAR DEL ESTADO**

Desde el pasado mes de abril, el presidente de ANCABA, miembro del Consejo Escolar del Estado, ha pasado a formar parte de la comisión permanente de dicha institución.

La comisión permanente es la encargada de realizar los dictámenes finales sobre las normas legales remitidas por el Ministerio de Educación para su estudio por el Consejo Escolar del Estado. Todos los miembros del Consejo pueden enviar observaciones y enmiendas, pero es la comisión permanente el órgano que redacta el dictamen final.

Como consecuencia de esta incorporación a la comisión permanente, el Sr. Felipe de Vicente, presidente de ANCABA, ha tenido la oportunidad de participar en la elaboración de diversos dictámenes, entre otros, en el decreto sobre becas y en el decreto sobre las pruebas externas de ESO y Bachillerato.

(En la foto, sala de reuniones de la permanente del Consejo Escolar del Estado)

## **LA ASOCIACIÓN DE CATEDRÁTICOS DE CATALUNYA CELEBRA SU 25 ANIVERSARIO**

Con la sala de actos del Colegio de Doctores y Licenciados Llena, se celebró el día 30 de junio el 25 aniversario de la creación de ACESC, Asociación de Catedráticos de Enseñanza Secundaria de Cataluña. Esta asociación, vinculada a ANCABA, se creó en base a las cuatro asociaciones provinciales de ANCABA. Su primer Presidente fue Jesús Burrel.

El acto constó de dos partes: en la primera, unas palabras de Josefina Cambra, Decana; Albert Botta y Felipe de Vicente, de ACESC y Jordi Sabaté, representante del Departamento de Enseñanza de la Generalitat de Cataluña. En la segunda parte, el conjunto de música de cámara "Música Antiga de Girona" ofreció un concierto de piezas barrocas. Finalmente se sirvió un refrigerio a los numerosos asistentes. Fue un acto emotivo de recuerdo de estos años al que también asistieron personas que habían formado parte de las juntas directiva en estos años.





## PUBLICACIONES EN CATEDRA NOVA



# CATEDRA NOVA

### CATEDRA NOVA REVISTA DE LOS CATEDRÁTICOS DE INSTITUTO

#### NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN DE ARTÍCULOS EN "CÁTEDRA NOVA"

1. Pueden publicar artículos en la revista los catedráticos y profesores de instituto. Tendrán preferencia los afiliados a ANCABA.
2. Los artículos deben enviarse en formato Word y no deben sobrepasar las 8-10 páginas. Las características de estilo de los originales son:
  - Interlineado sencillo
  - Fuente: tamaños máximos: Arial 11 o Times New Roman 12, o equivalentes, para el texto, aumentando dos puntos como máximo para cada nivel de títulos, o escalado hasta 3.
  - Las imágenes y ficheros gráficos serán en formato JPEG, mapa de bits (BMP) o GIF.
  - Las notas irán al final del texto, así como la bibliografía si procede.
  - El nombre y los apellidos del autor y su filiación (catedrático/profesor y especialidad o similar) constarán en la primera página. Bajo el título.
3. Los autores dan su autorización para que los artículos puedan ser reproducidos en Dialnet.
4. Los artículos han de enviarse a:  
**[ancaba@ancaba.net](mailto:ancaba@ancaba.net)**

## ANCABA ASOCIACIÓN

C  
A  
T  
E  
D  
R  
A  
N  
O  
V  
A

### ASOCIACIÓN NACIONAL DE CATEDRÁTICOS DE INSTITUTO

ANCABA es una asociación profesional e independiente, en la que se integran los catedráticos de Instituto; la primitiva Asociación de Catedráticos, entonces de Secundaria Enseñanza, se fundó en 1892.

Estatutariamente tienen los siguientes fines:

- a) Propagar los ideales asociativos entre los Catedráticos de Enseñanza Secundaria y representar y defender los legítimos intereses de sus asociados.
- b) Gestionar, de las autoridades competentes las mejoras profesionales y económicas que se consideren justas.
- c) Participar, mediante la correspondiente representación oficial, en los órganos consultivos y asesores de los entes públicos.
- d) Colaborar en el ámbito de sus fines profesionales con cuantas asociaciones o entidades públicas o privadas tengan como objetivos la educación o la problemática del personal docente.
- e) Impulsar el perfeccionamiento científico y profesional de los asociados y del resto del personal docente.
- f) Estudiar y proponer las reformas convenientes en el sistema educativo y en la selección, formación y atribuciones del personal docente.
- g) Mantener vivo el interés de la opinión pública por un sistema educativo de calidad.

ANCABA ofrece a sus afiliados: información sobre todas las novedades educativas mediante circulares periódicas, asesoramiento (consultas y asesoría jurídica), una revista profesional y formación permanente.

Para afiliarte o conectar con ANCABA, envía un correo electrónico a:

**ancaba@ancaba.net**

o un correo ordinario con tus datos personales a:

**Apartado de Correos: 544-03080 ALICANTE**

